

HÌNH HỌC 12- CHƯƠNG 3

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Bài toán mở đầu

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(a; b; c)$ và số dương r . Tìm điều kiện để điểm $M(x; y; z)$ nằm trên mặt cầu (S) tâm I có bán kính r .

Lời giải

$$M \in (S) \Leftrightarrow |\overline{IM}| = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \quad (*)$$

Nhận xét: Mọi điểm M nằm trên mặt cầu (S) đều có tọa độ thỏa mãn phương trình $(*)$.

Phương trình $(*)$ như trên được gọi là phương trình của mặt cầu (S) .

2. Định lý: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ bán kính r có phương trình là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

*** Ví dụ 1:** Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$ bán kính $r=5$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$

*** Ví dụ 2:** Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S) , biết:

a) $(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 16$.

b) $(x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 25$.

Lời giải

a) Mặt cầu đã cho có tâm $I(3; -4; 2)$, bán kính $r=4$.

b) Mặt cầu đã cho có tâm $I(-1; 5; -3)$, bán kính $r=5$.

3. Nhận xét

Phương trình mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ có thể viết dưới dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2.$$

Ngược lại những phương trình có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Khi đó mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

*** Ví dụ 3:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau là phương trình mặt cầu? Nếu là phương trình của một mặt cầu, xác định tọa độ tâm và tính bán kính của nó.

a. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z + 14 = 0$.

b. $x^2 + y^2 + z^2 - 8xy + 2y + 2z + 62 = 0$.

c. $3x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 6y + 2z - 6 = 0$.

d. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 2z - 6 = 0$.

Lời giải

a. Từ phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z + 14 = 0$ ta xác định được: $a = 2; b = -3; c = -1; d = 14$.

Khi đó: $a^2 + b^2 + c^2 - d = 2^2 + (-3)^2 + (-1)^2 - 14 = 0$.

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z + 14 = 0$ không phải phương trình mặt cầu.

b. Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8xy + 2y + 2z + 62 = 0$ không phải phương trình mặt cầu vì chứa xy .

c. Phương trình $3x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 6y + 2z - 6 = 0$ không là phương trình mặt cầu vì hệ số $x^2; y^2; z^2$ không bằng nhau.

d. Từ phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 2z - 6 = 0$ ta xác định được: $a = 2; b = -4; c = -1; d = -6$.

Khi đó: $a^2 + b^2 + c^2 - d = 2^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 6 = 27 > 0$.

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 2z - 6 = 0$ là phương trình của một mặt cầu có tâm $I(2; -4; -1)$,

bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 3\sqrt{3}$.

4. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 6z + 2 = 0$ đi qua điểm nào sau đây?

A. Điểm $Q(1; 1; -2)$. B. Điểm $M(-2; 3; 7)$. C. Điểm $N(1; 3; -2)$. D. Điểm $P(1; 3; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Từ phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 6z + 2 = 0$ ta xác định được:

$a = -1; b = 1; c = -3; d = 2$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -3)$, bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 3$

$IN = 3$ nên N thuộc mặt cầu (S)

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay

- Nhập biểu thức

- Sử dụng chức năng CALC để thử các đáp án.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$ bán kính $r = 2$ có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4.$

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4.$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2.$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2.$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ có tâm $I = (a; b; c)$, bán kính r .

Thay tọa độ tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $r = 2$ vào phương trình mặt cầu (S) , ta được

$$(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1; -2; 3)$ và $A(1; 0; 3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2.$

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4.$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4.$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2.$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu có bán kính $r = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2 + (3-3)^2} = 2$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4.$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; -1; 0)$ và $B(0; 3; -4)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3.$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3.$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9.$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9.$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB , khi đó I là trung điểm của AB

$$\Rightarrow I\left(\frac{2+0}{2}; \frac{-1+3}{2}; \frac{0-4}{2}\right) \text{ hay } I(1; 1; -2)$$

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = (-2; 4; -4) \Rightarrow AB = |\overline{AB}| = 6 \Rightarrow \text{bán kính } r = \frac{AB}{2} = 3$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9.$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y = 0.$

B. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 1 = 0.$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2 = 0.$

D. $x^2 + y^2 - z^2 - x + y - 5 = 0.$

Lời giải

Chọn A

Phương trình có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Đáp án A: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y = 0$ có

$a = -1; b = -2; c = d = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ nên nó là phương trình mặt cầu.

Đáp án B và D không là phương trình mặt cầu vì hệ số $x^2; y^2; z^2$ không bằng nhau.

Đáp án C có $a = 1; b = -1; c = 0; d = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ nên nó không phải phương trình mặt cầu.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

Diện tích của mặt cầu (S) là

A. 12π .

B. 9π .

C. 36π .

D. 24π .

. **Lời giải**

Chọn C

Từ phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ ta xác định được: $a = 1; b = 2; c = 3; d = 5$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1 + 4 + 9 - 5} = 3$$

Mặt cầu (S) có diện tích là: $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 3; -1), B(-2; 1; 1); C(4; 1; 7)$. Bán kính r của mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C là

A. $r = \frac{\sqrt{83}}{2}$.

B. $r = \frac{\sqrt{77}}{2}$.

C. $r = \frac{\sqrt{115}}{2}$.

D. $r = \frac{9}{2}$.

. **Lời giải**

Chọn A

Phương trình mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C nên tọa độ O, A, B, C thỏa mãn phương trình mặt cầu.

Thay tọa độ O, A, B, C vào phương trình trên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a + 6b - 2c - d = 11 \\ -4a + 2b + 2c - d = 6 \\ 8a + 2b + 14c - d = 66 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{5}{2} \\ c = \frac{7}{2} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{83}}{2}.$$